الـموضوع رقم (03)

شعبتي رياضيات وَ تقني رياضي

التمرين الأول : -- (المتتاليات العددية و التحويلات النقطية)

لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بحدها العام كما يلي : $v_n=\frac{1}{2}\int_n^{n+1}3^x\,dx$.

1/ أوجد عبارة v_n بدلالة n .

2/ أثبت أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

3/ أ- احسب بدلالة n عبارة المجموع التالي : $S_n=v_0+v_1+v_2+....+v_n$.

ب- استنتج قيمة n الطبيعية حتى يكون : $S_n=\frac{242}{2\ln 3}$

4/المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نضع A ، B و C ثلاث نقاط إحداثيتها على الترتيب :

$(v_0\ln 3\ ;\ v_1\ln 3)$ ، $(v_1\ln 3\ ;\ v_1\ln 3)$ ، $(v_1\ln 3\ ;\ v_2\ln 3)$.

و ليكن f تشابه مباشر من المستوي ، مركزه النقطة B و الذي يحول النقطة C إلى النقطة A .

أ- عين العلاقة المركبة للتشابه f و العناصر المميزة له .

ب- أوجد معادلة الدائرة (c') صورة الدائرة (c) التي تشمل النقط A ، B و C بالتحويل f .

التمرين الثاني : -- (الأعداد المركبة)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-(2+2\cos\alpha)z+2+2\cos\alpha=0$ ....(*)

وليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (*) حيث $\alpha\in]-2\pi;2\pi[$.

1/ أ- اثبت من أجل قيم محددة لـ α أن المعادلة (*) تقبل حلين مترافقين هما z_1 و z_2 وَ يحققان المعادلة : $z_1(1-z_2)+z_2=0$.

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (*)، ثم ماذا تستنتج ؟

2/ أ- اثبت أن : $z_1=1+\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)$

ب- ناقش حسب قيم α طويلة و عمدة العدد المركب z_1 .

3/ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقطة n_1 صورة العدد المركب z_1 وَ النقطة n_2 صورة العدد المركب z_2 .

أ- بين أن النقطتين n_1 وَ n_2 تنتميان إلى نفس المجموعة عندما تتغير α في المجال $]-2\pi;2\pi[$.

ب- بين أنه توجد أربعة قيم مختلفة للعدد α تجعل : $n_1n_2=2$.

ج- بين أنه توجد ثلاث قيم مختلفة للعدد α تجعل : $n_1n_2=0$.

التمرين الثالث : -- (الموافقات في $\mathbb{Z}$)

1/ ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للأعداد 2^n ، 3^n ، 4^n على 7 .

2/ عين باقي قسمة العدد $4^{2018}+3^{2017}-2^{2016}$ على 7 .

3/ استنتج أنه من أجل كل $k\in\mathbb{N}$ يكون : $5\times 2^{3k+1}-5^{6k+5}+28\equiv 0[7]$.

4/ حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة : $10^{3n}+4^{2n}-22^{n}\equiv 0[7]$.

5/ عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $2^n+3^n+4^n\equiv 2[7]$ وَ $0<n\leq 25$.

6/ أ- برهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $(4n+3)\times 9^n-4^{2n+3}\equiv 2(2n+1)\times 3^{2n}[7]$

ب- عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n بحيث : $(4n+3)\times 9^n-4^{2n+3}\equiv 0[7]$ وَ n من مضاعفات 8 .

7/ يحتوي كيس على 10 قريصات مرقمة من 0 إلى 9 ، نسحب في آن واحد قريصتين و نعتبر أن كل السحابات الممكنة متساوية الاحتمال .

أ- ما هو عدد طرق السحب بالكيفية المذكورة ؟

ب- ما هو الاحتمال لكي يكون مجموع الرقمين المسحوبين من بواقي قسمة 3^n على 7 .

التمرين الرابع : -- (الدالتين الأسية – اللوغارتمية و التحويلات النقطية)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$ كما يلي : $f(x)=x+\ln\left|e^x-2\right|$.

(C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين : $e^{2x}-2e^x+1=0$ وَ $e^{2x}-2e^x-1=0$.

ب- عين نقاط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

2/ أدرس تغيرات الدالة f .

3/ أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$ يكون لدينا : $f(x)=2x+\ln\left|1-2e^{-x}\right|$.

ب- بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) وَ (Δ') معادلتاهما على التوالي : $y=x+\ln 2$ ، $y=2x$.

4/ نعتبر وحدة الطول $2cm$ ، أنشئ كل من (Δ) ، (Δ') وَ (C_f) .

5/ ليكن التحويل النقطي S للمستوي المركب في نفسه وَ الذي يرفق كل نقطة M لاحقتها Z بالنقطة M' ذات اللاحقة Z'

بحيث : $Z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)Z$.

أ- عين طبيعة التحويل S وَ حدد عناصره المميزة .

ب- نضع $Z=x+i\,y$ وَ $Z'=x'+i\,y'$ ، عبر عن x' وَ y' بدلالة x وَ y .

ج- بين أن صورة المنحنى (C_f) بالتحويل S على المجال $]\ln 2;+\infty[$ هو المنحنى الذي معادلته : $x'=y'+\ln\left(e^{2y'}+2\right)$.

التصحيح النموذجي للموضوع رقم (03)
شعبتي : رياضيات وَ تقني رياضي

حل التمرين الأول

1/ إيجاد عبارة v_n بدلالة n:

لدينا : $v_n = \frac{1}{2}\int_n^{n+1} 3^x\,dx = \frac{1}{2}\int_n^{n+1} e^{\ln(3^x)}dx = \frac{1}{2}\int_n^{n+1} e^{x\ln 3}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{x\ln 3}}{\ln 3}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{3^x}{\ln 3}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3^{n+1}-3^n}{\ln 3}\right)$

$v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3^n(3-1)}{\ln 3}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}\times 3^n}{\ln 3}\right)$

$v_n = \frac{3^n}{\ln 3}$

2/ إثبت أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : $v_n = \frac{3^n}{\ln 3}$ منه : $v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{\ln 3} = 3\times\frac{3^n}{\ln 3} = 3\,v_n$ و بالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{\ln 3}$.

3/ أ- حساب بدلالة n المجموع v_n :

لدينا : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ منه : $S_n = v_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$ و منه : $S_n = \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\right)$ إذن : $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2\ln 3}$.

ب- استنتج قيمة العدد الطبيعي n :

لدينا : $S_n = \frac{242}{2\ln 3}$ تكافئ : $\frac{3^{n+1}-1}{\cancel{2\ln 3}} = \frac{242}{\cancel{2\ln 3}}$ تكافئ : $3^{n+1}-1 = 242$ تكافئ : $3^{n+1} = 243$ تكافئ : $3^{n+1} = 3^5$ إذن : $n=4$.

4/ أ- تعيين العلاقة المركبة للتشابه f :

حسب المعطيات نجد : $A(1;3)$ و $B(3;3)$ وَ $C(3;9)$ وَ العبارة المركبة للتشابه f من الشكل : $z' = az+b$ مع $|a|\neq 1$

⊃ حساب a : لدينا العبارة المختصرة للتشابه f الذي مركزه B و الذي يحول C إلى A من الشكل : $z_A - z_B = a(z_C - z_B)$

منه : $a = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ و منه : $a = \frac{1+3i-(3+3i)}{3+9i-(3+3i)} = \frac{-2}{6i} = \frac{-1}{3i} = \frac{i^2}{3i} = \frac{i}{3} = \frac{1}{3}i$ أي : $a = \frac{1}{3}i$

⊃ حساب b : لدينا : $z_B = \frac{b}{1-a}$ منه : $b = (1-a)z_B$ و منه : $b = \left(1-\frac{1}{3}i\right)(3+3i)$ أي : $b = 4+2i$

إذن العبارة المركبة للتشابه المباشر f تعطى بالعلاقة : $z' = \frac{1}{3}iz + 4 + 2i$

حيث نسبته : $k = |a| = \left|\frac{1}{3}i\right| = \frac{1}{3}$ و مركزه النقطة $B(3;3)$ و زاويته $\theta = \arg(a) = \arg\left(\frac{1}{3}i\right) = \frac{\pi}{2}$

ب- إيجاد معادلة الدائرة (c') صورة الدائرة (c):

– لدينا الدائرة (c) تشمل النقط A ، B و C حيث ABC مثلث قائم في B (لأن $f(C)=A$ و زاوية التشابه هي $\frac{\pi}{2}$)

⊃ مركز الدائرة (c) هو منتصف القطعة $[AC]$ و لتكن النقطة ω ذات اللاحقة $z_\omega = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{4+12i}{2} = 2+6i$ منه : $\omega(2;6)$

⊃ نصف قطر الدائرة (c) هو: $r = \frac{AC}{2} = \frac{|z_C - z_A|}{2} = \frac{|2+6i|}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

إذن معادلة الدائرة (c) تكتب على الشكل : $(c):(x-2)^2+(y-6)^2=\sqrt{10}^2=10$.

– صورة الدائرة (c) بالتشابه المباشر f هي دائرة (c') حيث :

- مركزها النقطة ω' صورة النقطة ω بالتحويل f أي : $\omega'=f(\omega)$ منه : $z_{\omega'}=\frac{1}{3}i\,z_\omega+4+2i=2-\frac{4}{3}i$ و منه : $\omega'\left(2;-\frac{4}{3}\right)$
- و نصف قطرها هو r' حيث : $r'=k\times r$ منه : $r'=\frac{\sqrt{10}}{3}$

إذن معادلة الدائرة (c') تكتب على الشكل : $(c'):(x-2)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$.

حل التمرين الثاني

1/ أ– إثبات أن للمعادلة (*) حلين مترافقين :

المميز المختصر للمعادلة هو : $\Delta'=(1+\cos\alpha)^2-(2+2\cos\alpha)=1+\cancel{2\cos\alpha}+\cos^2\alpha-2-\cancel{2\cos\alpha}=\cos^2\alpha-1$

منه : $\Delta'=-\sin^2\alpha<0$ ، من أجل $\alpha\in]-2\pi;2\pi[-\{-\pi;0;\pi\}$ ، و بالتالي للمعادلة (*) حلين مترافقين .

لدينا : $z_1(1-z_2)+z_2=z_1-z_1\times z_2+z_2=z_1+z_2-z_1\times z_2=\frac{-b}{a}-\frac{c}{a}=2+2\cos\alpha-(2+2\cos\alpha)=0$

إذن : $z_1(1-z_2)+z_2=0$.

ب– حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (*):

لدينا : $\Delta=-\sin^2\alpha=(i\sin\alpha)^2$ منه : $\Delta=(i\sin\alpha)^2$

منه : $z_1=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ و $z_2=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=1+\cos\alpha-i\sin\alpha$

إذن مجموعة حلول المعادلة (*) هي : $S=\{1+\cos\alpha+i\sin\alpha;1+\cos\alpha-i\sin\alpha\}$.

2/ أ– إثبات أن : $z_1=1+\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)$

لدينا : $1+\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}+e^0=e^{i\frac{\alpha}{2}+i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}+i\frac{\alpha}{2}}=e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)$ منه : $z_1=e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)$.

ب– المناقشة حسب قيم α طويلة و عمدة العدد المركب z_1 :

لدينا : $z_1=e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)$ منه : $z_1=e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$ أي : $z_1=\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$

الجدول المقابل يوضح إشارة $\cos\frac{\alpha}{2}$

α	-2π	$-\pi$		0		π	2π
$\frac{\alpha}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$	π
$Cos\frac{\alpha}{2}$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

- إذا كان : $\alpha\in]-\pi;\pi[$ فإن : $|z_1|=2\cos\frac{\alpha}{2}$ و $\arg(z_1)=\frac{\alpha}{2}$
- إذا كان : $\alpha\in]-2\pi;-\pi[\cup]\frac{\pi}{2};\pi[$ فإن : $|z_1|=-2\cos\frac{\alpha}{2}$ و $\arg(z_1)=\frac{\alpha}{2}+\pi$
- إذا كان : $\alpha=-\pi$ أو $\alpha=\pi$ فإن : $z_1=0$ و بالتالي : $|z_1|=0$ أما $\arg(z_1)$ غير معرفة .

3/ أ– لنبين أن النقطتين n_1 و n_2 تنتميان إلى نفس المجموعة :

- لدينا النقطة n_1 صورة العدد المركب z_1 معناه : $n_1(1+\cos\alpha;\sin\alpha)$ منه : $\begin{cases}x=1+\cos\alpha\\y=\sin\alpha\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}x-1=\cos\alpha\\y=\sin\alpha\end{cases}$

بالتربيع نجد : $\begin{cases}(x-1)^2=\cos^2\alpha\\ y^2=\sin^2\alpha\end{cases}$ بالجمع نجد : $(x-1)^2+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ منه : $(x-1)^2+y^2=1$

إذن مجموعة النقط n_1 عندما تتغير α في المجال $]-2\pi;2\pi[$ هي دائرة مركزها $\omega(1;0)$ و نصف قطرها $r=1$.

لدينا النقطة n_2 صورة العدد المركب z_2 معناه : $n_2(1+\cos\alpha;-\sin\alpha)$ منه : $\begin{cases}x=1+\cos\alpha\\ y=-\sin\alpha\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}x-1=\cos\alpha\\ y=-\sin\alpha\end{cases}$

بالتربيع نجد : $\begin{cases}(x-1)^2=\cos^2\alpha\\ y^2=\sin^2\alpha\end{cases}$ بالجمع نجد : $(x-1)^2+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ منه : $(x-1)^2+y^2=1$

إذن مجموعة النقط n_2 عندما تتغير α في المجال $]-2\pi;2\pi[$ هي دائرة مركزها $\omega(1;0)$ و نصف قطرها $r=1$.

ب- لنبين أنه توجد أربعة قيم مختلفة للعدد α تجعل $n_1n_2=2$:

لدينا : $n_1n_2=2$ تكافئ : $|z_2-z_1|=2$ تكافئ : $|-2i\sin\alpha|=2$ تكافئ : $2|\sin\alpha|=2$ تكافئ : $|\sin\alpha|=1$ تكافئ : $\begin{cases}\sin\alpha=1\\ \sin\alpha=-1\end{cases}$

أي : $\begin{cases}\alpha=\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \alpha=-\dfrac{3\pi}{2}\\ \alpha=-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \alpha=\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$ لاحظ وجود أربعة قيم للعدد α على المجال $]-2\pi;2\pi[$ تجعل $n_1n_2=2$.

ج- لنبين أنه توجد ثلاثة قيم مختلفة للعدد α تجعل $n_1n_2=0$:

لدينا : $n_1n_2=0$ تكافئ : $|z_2-z_1|=0$ تكافئ : $|-2i\sin\alpha|=0$ تكافئ : $\sin\alpha=0$ أي : $\alpha=0$ أو $\alpha=\pi$ أو $\alpha=-\pi$

لاحظ وجود ثلاثة قيم للعدد α على المجال $]-2\pi;2\pi[$ تجعل $n_1n_2=0$.

حل التمرين الثالث

1/ - دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 :

$2^0\equiv1[7]$ ، $2^1\equiv2[7]$ ، $2^2\equiv4[7]$ ، $2^3\equiv1[7]$ ، نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 3 .

- التعميم: في كل حالة نضع $k\in\mathbb{N}$

- إذا كان : $n=3k$ فإن : $2^{3k}\equiv1[7]$ و بالتالي الباقي هو 1 .
- إذا كان : $n=3k+1$ فإن : $2^{3k+1}\equiv2[7]$ و بالتالي الباقي هو 2 .
- إذا كان : $n=3k+2$ فإن : $2^{3k+2}\equiv4[7]$ و بالتالي الباقي هو 4 .

- دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7 :

$3^0\equiv1[7]$ ، $3^1\equiv3[7]$ ، $3^2\equiv2[7]$ ، $3^3\equiv6[7]$ ، $3^4\equiv4[7]$ ، $3^5\equiv5[7]$ ، $3^6\equiv1[7]$

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 6 .

- التعميم: في كل حالة نضع $k\in\mathbb{N}$

- إذا كان : $n=6k$ فإن : $3^{6k}\equiv1[7]$ و بالتالي الباقي هو 1 .
- إذا كان : $n=6k+1$ فإن : $3^{6k+1}\equiv3[7]$ و بالتالي الباقي هو 3 .
- إذا كان : $n=6k+2$ فإن : $3^{6k+2}\equiv2[7]$ و بالتالي الباقي هو 2 .
- إذا كان : $n=6k+3$ فإن : $3^{6k+3}\equiv6[7]$ و بالتالي الباقي هو 6 .
- إذا كان : $n=6k+4$ فإن : $3^{6k+4}\equiv4[7]$ و بالتالي الباقي هو 4 .
- إذا كان : $n=6k+5$ فإن : $3^{6k+5}\equiv5[7]$ و بالتالي الباقي هو 5 .

– دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7 :

$4^0 \equiv 1[7]$ ، $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^3 \equiv 1[7]$ ، نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 3 .

– التعميم: في كل حالة نضع $k \in \mathbb{N}$

- إذا كان : $n = 3k$ فإن : $4^{3k} \equiv 1[7]$ و بالتالي الباقي هو 1 .
- إذا كان : $n = 3k+1$ فإن : $4^{3k+1} \equiv 4[7]$ و بالتالي الباقي هو 4 .
- إذا كان : $n = 3k+2$ فإن : $4^{3k+2} \equiv 2[7]$ و بالتالي الباقي هو 2 .

2/ تعيين باقي قسمة العدد $2^{2016} - 3^{2017} + 4^{2018}$ على 7:

لدينا : $2^{2016} - 3^{2017} + 4^{2018} \equiv 2^{3\times672} - 3^{6\times336+1} + 4^{3\times672+2}[7]$

$\equiv 1 - 3 + 2[7]$

$\equiv 0[7]$

إذن باقي قسمة العدد $2^{2016} - 3^{2017} + 4^{2018}$ على 7 هو 0 .

3/ استنتاج أن: $5\times 2^{3k+1} - 5^{6k+5} + 28 \equiv 0[7]$

لدينا : $5\times 2^{3k+1} - 5^{6k+5} + 28 \equiv 5\times 2^{3k+1} + 2^{6k+5} + 4\times 7[7]$

$\equiv 5\times 2^{3k+1} + 2^{6k}\times 2^5 + 4\times 7[7]$

$\equiv 3 + 4 + 0[7]$

$5\times 2^{3k+1} - 5^{6k+5} + 28 \equiv 0[7]$

4/ حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة : $10^{3n} + 4^{2n} - 22^n \equiv 0[7]$

لدينا : $10^{3n} + 4^{2n} - 22^n \equiv 0[7]$ تكافئ : $3^{3n} + 4^{2n} - 1^n \equiv 0[7]$ تكافئ : $6^n + 2^n - 1 \equiv 0[7]$

تكافئ : $2^n \times 3^n + 2^n - 1 \equiv 0[7]$ تكافئ : $2^n\left(3^n + 1\right) - 1 \equiv 0[7]$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$2^n \equiv$	1	2	4	1	2	4	$[7]$
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	$[7]$
$3^n + 1 \equiv$	2	4	3	0	5	6	$[7]$
$2^n\left(3^n+1\right) \equiv$	2	1	5	0	3	3	$[7]$
$2^n\left(3^n+1\right) - 1 \equiv$	1	0	4	6	2	2	$[7]$

من الجدول يتبين أن : $2^n\left(3^n+1\right) - 1 \equiv 0[7]$ لما : $n \equiv 1[6]$ أي : $n = 6k+1$ مع $k \in \mathbb{N}$.

5/ تعيين الأعداد الطبيعية n:

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$2^n \equiv$	1	2	4	1	2	4	$[7]$
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	$[7]$
$4^n \equiv$	1	4	2	1	4	2	$[7]$
$2^n + 3^n + 4^n \equiv$	3	2	1	1	3	4	$[7]$

من الجدول يتبين أن : $2^n + 3^n + 4^n \equiv 2[7]$ لما : $n \equiv 1[6]$ أي : $n = 6k+1$ مع $k \in \mathbb{N}$.

بما أن : $0 < n \leq 25$ فإن : $n \in \{1;7;13;19;25\}$.

6/ أ- لنبرهن أن: $(4n+3)\times 9^n - 4^{2n+3} \equiv 2(2n+1)\times 3^{2n}[7]$

لدينا : $(4n+3)\times 9^n - 4^{2n+3} \equiv (4n+3)\times 3^{2n} - (-3)^{2n+3}[7]$

$$\equiv (4n+3)\times 3^{2n} + 3^{2n+3}[7]$$
$$\equiv (4n+3)\times 3^{2n} + 3^{2n}\times 3^3[7]$$
$$\equiv (4n+3)\times 3^{2n} + 3^{2n}\times 6[7]$$
$$\equiv (4n+9)\times 3^{2n}[7]$$
$$\equiv (4n+2)\times 3^{2n}[7]$$

$$(4n+3)\times 9^n - 4^{2n+3} \equiv 2(2n+1)\times 3^{2n}[7]$$

ب- تعيين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n:

لدينا : $(4n+3)\times 9^n - 4^{2n+3} \equiv 0[7]$ تكافئ : $2(2n+1)\times 3^{2n} \equiv 0[7]$ تكافئ : $2(2n+1)\equiv 0[7]$ تكافئ : $2n+1\equiv 0[7]$

تكافئ : $2n\equiv -1[7]$ تكافئ : $2n\equiv 6[7]$ أي : $n\equiv 3[7]$ منه : $n=7k+3$ مع $k\in\mathbb{N}$.

لدينا أيضاً n من مضاعفات 8 معناه : $n\equiv 0[8]$ منه : $7k+3\equiv 0[8]$ تكافئ : $-k\equiv -3[8]$ تكافئ : $k\equiv 3[8]$

و بالتالي : $k=8k'+3$ مع $k'\in\mathbb{N}$

إذن أصغر قيمة للعدد الطبيعي n هي لما $k=3$ و عليه $n=24$.

7/ أ- تعيين عدد طرق السحب :

بما أن السحب في أن واحد ، نستعمل عدد التوفيقات في حساب عدد طرق السحب ، إذن : $C_{10}^2 = 45$.

ب- حساب الاحتمال : عدد الحالات الملائمة 12 حالة و هي :

$$\{(0;1),(0;2),(0;3),(0;4),(0;5),(0;6),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(2;3),(4;2)\}$$

إذن الاحتمال المطلوب هو : $\frac{12}{45}=\frac{4}{15}$.

حل التمرين الرابع

1/ أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين:

- لدينا : $e^{2x}-2e^x+1=0$ تكافئ : $\left(e^x-1\right)^2=0$ تكافئ : $e^x-1=0$ تكافئ : $e^x=1$ منه : $x=0$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $S_1=\{0\}$.

- و لدينا : $e^{2x}-2e^x-1=0$ بوضع $X=e^x$ (حيث $X>0$) في المعادلة فتصبح : $X^2-2X-1=0$ ....(1)

المميز المختصر للمعادلة (1) هو: $\Delta'=2$ إذن للمعادلة (1) حلين متمايزين هما : $X_1=1+\sqrt{2}$ ، $X_2=1-\sqrt{2}$ (مرفوض لأنه سالب)

لدينا : $X_1=1+\sqrt{2}$ منه : $e^x=1+\sqrt{2}$ أي : $x=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $S_2=\left\{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}$.

ب- تعيين نقاط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل :

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل معناه : $f(x)=0$ منه : $x+\ln\left|e^x-2\right|=0$ تكافئ : $\ln\left|e^x-2\right|=-x$

تكافئ : $\left|e^x-2\right|=e^{-x}$ تكافئ : $\begin{cases} e^x-2=e^{-x} \\ e^x-2=-e^{-x}\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} e^{2x}-2e^x=1 \\ e^{2x}-2e^x=-1\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} e^{2x}-2e^x-1=0 \\ e^{2x}-2e^x+1=0\end{cases}$

وحسب ما سبق فإن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين هما : $O(0;0)$ و $A\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right);0\right)$.

2/ دراسة تغيرات الدالة f:

① مجموعة التعريف : لدينا $D_f=\mathbb{R}-\{\ln 2\}$.

② حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\ln\left|\underbrace{e^x}_{0}-2\right|\right)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\ln\left|e^x-2\right|\right)=+\infty$

$$\lim_{x\to\ln 2} f(x)=\lim_{x\to\ln 2}\left(x+\underbrace{\ln\left|e^x-2\right|}_{-\infty}\right)=-\infty$$

③ اتجاه التغير : الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على D_f حيث : $f'(x)=1+\dfrac{e^x}{e^x-2}$ ومنه : $f'(x)=\dfrac{2\left(e^x-1\right)}{e^x-2}$

الجدول المقابل يوضح إشارة المشتقة

x	$-\infty$	0		$ln2$	$+\infty$
$2(e^x-1)$	$-$	0	$+$		$+$
e^x-2	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$

• إذا كان : $x\in\left]0;\ln 2\right[$ فإن $f'(x)<0$ وَ بالتالي f دالة متناقصة تماما .

• إذا كان : $x\in\left]-\infty;0\right]\cup\left]\ln 2;+\infty\right[$ فإن $f'(x)\geq 0$ وَ بالتالي f دالة متزايدة .

③ جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$ln2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)=0$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3/ أ- لنبين أن : $f(x)=2x+\ln\left|1-2e^{-x}\right|$

لدينا: $f(x)=x+\ln\left|e^x-2\right|=x+\ln\left|e^x\left(1-2e^{-x}\right)\right|=x+\underbrace{\ln e^x}_{x}+\ln\left|1-2e^{-x}\right|$ ومنه : $f(x)=2x+\ln\left|1-2e^{-x}\right|$.

ب- لنبين أن المنحنى يقبل مستقيمين مقاربين مائلين :

• بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+\ln 2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left|\underbrace{e^x}_{0}-2\right|-\ln 2\right]=\ln 2-\ln 2=0$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته : $(\Delta): y=x+\ln 2$ بجوار $-\infty$.

• بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left|1-\underbrace{2e^{-x}}_{0}\right|=\ln 1=0$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته : $(\Delta'): y=2x$ بجوار $+\infty$.

4/ الرسم: أنظر الصفحة الموالية

لدينا : $\lim\limits_{x\to\ln 2} f(x)=-\infty$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته : $x=\ln 2$ يوازي محور التراتيب .

5/ أ- تعيين الطبيعة وَ العناصر المميزة للتحويل S :

لدينا : $Z'=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)Z$ مع : $a=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ وَ $b=0$

بما أن : $|a|=\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\neq 1$ فإن التحويل S عبارة عن تشابه نسبته : $|a|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

مركزه مبدأ المعلم $O(0;0)$ لأن : $b=0$ وَ زاويته : $\theta=\arg(a)=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ب- لنعبر عن x' وَ y' بدلالة x وَ y :

لدينا : $Z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) Z$ تكافئ : $x' + i\,y' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(x + i\,y)$ تكافئ : $x' + i\,y' = \frac{1}{2}(1-i)(x+i\,y)$

تكافئ : $x' + i\,y' = \frac{1}{2}\left(x + y + i(-x+y)\right)$ بالمطابق نجد : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x+y) \end{cases}$.

ج- تعيين صورة المنحنى (C_f) بالتحويل S:

لدينا : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x+y) \end{cases}$ بالجمع نجد : $y = x' + y'$ نعوض في إحدى المعادلتين نجد : $x = x' - y'$

وَلدينا على المجال $]\ln 2 ; +\infty[$: $f(x) = x + \ln\left(e^x - 2\right)$ منه : $y = x + \ln\left(e^x - 2\right)$ ....(1)

بتعويض كل من $x = x' - y'$ وَ $y = x' + y'$ في (1) نجد : $x' + y' = x' - y' + \ln\left(e^{x'-y'} - 2\right)$

تكافئ : $2y' = \ln\left(e^{x'-y'} - 2\right)$ تكافئ : $e^{2y'} = e^{x'-y'} - 2$ تكافئ : $e^{x'-y'} = e^{2y'} + 2$ تكافئ : $x' - y' = \ln\left(e^{2y'} + 2\right)$

إذن : $x' = y' + \ln\left(e^{2y'} + 2\right)$ و هي الصورة المطلوبة .